

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

#### **9.2.4 Σενάριο 6. Συμμεταβολές στο ισοσκελές τρίγωνο**

##### ***Γνωστική περιοχή:***

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου.

Συμμεταβολή μεγεθών.

Εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου.

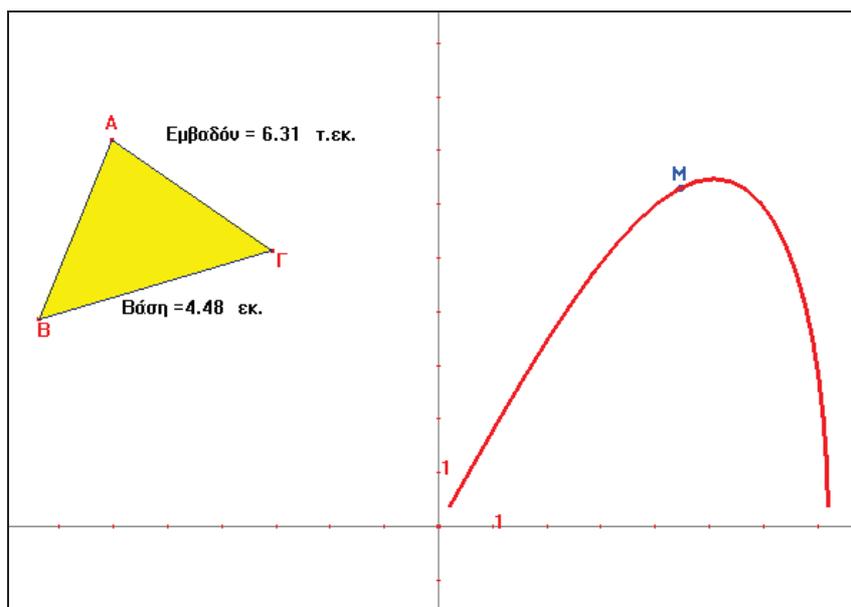
Σύστημα συντεταγμένων.

Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Μέγιστη – ελάχιστη τιμή.

##### ***Θέμα:***

Στο περιβάλλον του λογισμικού Cabri Geometry II σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Μελετήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του όταν μεταβάλλεται η βάση του και οι ίσες πλευρές του παραμένουν σταθερές. Πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;



Εικόνα 34.

**Τεχνολογικά εργαλεία:**

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του Cabri Geometry II.

**Σκεπτικό:**

**Βασική ιδέα:**

Με το προτεινόμενο σενάριο, οι μαθητές της Β΄ Λυκείου καλούνται:

Να διερευνήσουν και να κατανοήσουν την συμμεταβολή εμβαδού και βάσης ισοσκελούς τριγώνου του οποίου οι ίσες πλευρές παραμένουν σταθερές.

Να περιγράψουν τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να εκφράσουν αλγεβρικά την συμμεταβολή αυτή.

Να διερευνήσουν και να εκφράσουν την μέγιστη τιμή για το εμβαδόν.

Με την παραπάνω διαδικασία, οι μαθητές θα μελετήσουν την έννοια της συμμεταβολής, της συνάρτησης και θα συνδυάσουν γνώσεις και εμπειρίες της γεωμετρίας με αυτές της άλγεβρας και των συναρτήσεων.

**Προστιθέμενη αξία.**

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο δεν αποτελεί μόνο μια καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας των Μαθηματικών αλλά φιλοδοξεί να έχει και ευρύτερες επιρροές. Συγκεκριμένα:

Φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει στην διδασκαλία του το προτεινόμενο σενάριο θα έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους οι οποίες θα συμβάλουν στην βελτίωση της στάσης του απέναντι στη καθημερινή σχολική διαδικασία.

Θα διδάξει σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο του σεναρίου το οποίο προβλέπει ατμόσφαιρα ερευνητικού εργαστηρίου.

Η συμβολή του σ' αυτό απαιτεί αλλαγή του ρόλου του και από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης, καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών του, σημείο αναφοράς της τάξης του ως προς την καθοδήγηση της έρευνας και την επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων των μαθητών αλλά και ερευνητής ο ίδιος.

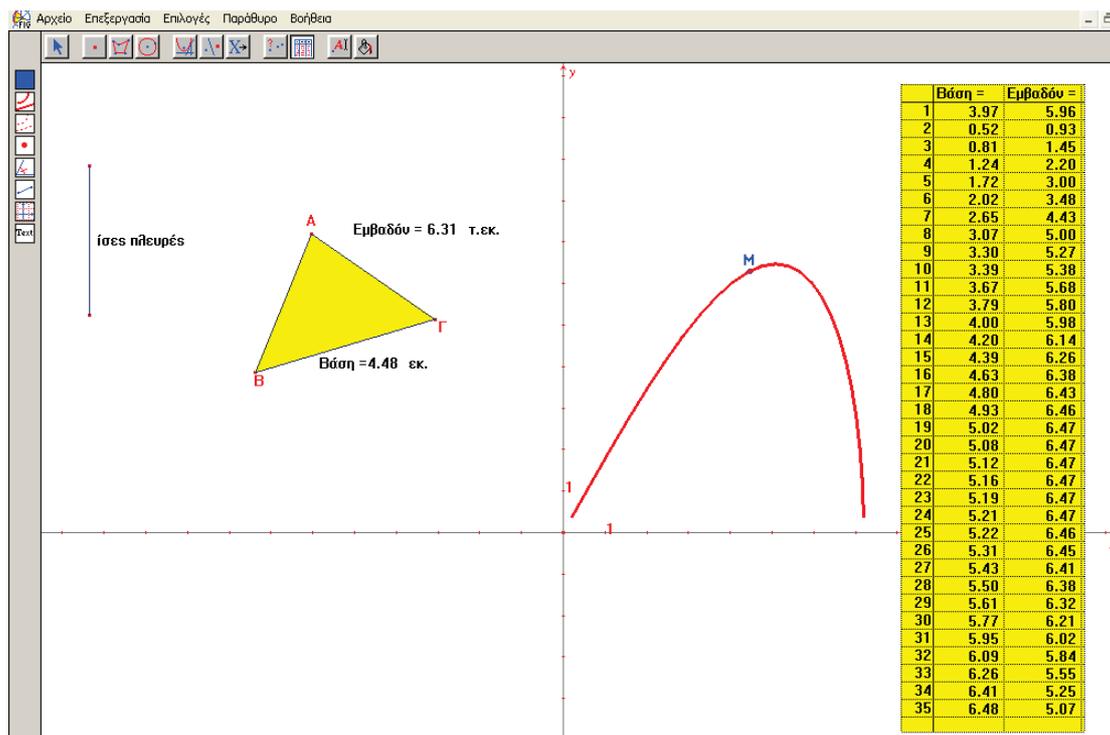
Σ' ένα σχολείο στο οποίο εφαρμόζονται εκπαιδευτικά σενάρια όπως το προτεινόμενο απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Η διεύθυνση του σχολείου θα πρέπει να γνωρίζει ότι η εφαρμογή σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτεί μια άλλη στάση απέναντι στη λειτουργία του σχολείου. Για παράδειγμα ίσως χρειαστεί μερικές ομάδες μαθητών να συναντηθούν και να εργαστούν στο σχολείο πέραν του κλασικού ωραρίου. Αυτό πρέπει κατά

κάποιο τρόπο να διασφαλιστεί και οι μαθητές να ενθαρρυνθούν σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων προς την κατεύθυνση της μάθησης και της διδασκαλίας. Έτσι βελτιώνεται η σχολική ζωή και το σχολείο αποκτά ένα πιο συγκεκριμένο ρόλο στο πλαίσιο της κοινωνίας. Η εφαρμογή του προτεινόμενου εκπαιδευτικού σεναρίου αναμένεται να συμβάλει προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτεί διερεύνηση και πειραματισμό είναι διαπιστωμένο ότι ενισχύει από τη μεριά τους την δημιουργία εικασιών και τον έλεγχο τους, την διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων, την αξιοποίηση ενός μεγάλου εύρους και ποικιλίας γνώσεων και εμπειριών μέσω των οποίων αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος.

Επίσης στη διδασκαλία των σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεγεθών με παραδοσιακά μέσα δεν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν πειράματα με τον προσδιορισμό του τρόπου συμμεταβολής και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της. Για παράδειγμα, ο τρόπος συμμεταβολής της βάσης και του εμβαδού του ισοσκελούς τριγώνου δεν μπορεί να αποτυπωθεί ταυτόχρονα και με πολλαπλούς τρόπους με τον παραδοσιακό τρόπο, όπως συμβαίνει με τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας. Η χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Cabri geometry II, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να χειρίζεται δυναμικά το σχήμα και να παρακολουθεί πώς συμμεταβάλλονται τα δυο μεγέθη που μελετώνται. Ακόμα, το ίδιο το λογισμικό του επιτρέπει να καταγράφει και τις αριθμητικές τιμές των δυο μεγεθών και έτσι να έχει την δυνατότητα να περιγράφει με πολλαπλούς τρόπους αυτή την συμμεταβολή.



Εικόνα 35.

### Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

Για τους περισσότερους μαθητές το εμβαδόν τριγώνου είναι απλά ένας τύπος που χρησιμοποιείται στον αριθμητικό υπολογισμό του εμβαδού και τίποτα περισσότερο. Μάλιστα ο τύπος αυτός συνδέεται με συγκεκριμένα μεγέθη του τριγώνου, την βάση του και το ύψος του. Ερωτήματα, όπως, πως μεταβάλλεται το εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου όταν μεταβάλλεται ένα από τα στοιχεία που το ορίζουν, όπως για παράδειγμα οι ίσες πλευρές του ενώ τα άλλα στοιχεία του παραμένουν σταθερά είναι ασυνήθιστο να τίθενται αλλά και δύσκολο ν' απαντηθούν. Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri Geometry II και το The Geometers' Sketchpad επιτρέπουν την μελέτη τέτοιων ερωτημάτων, όπως αυτό που τίθεται στην παρούσα διερεύνηση.

Στο σενάριο που προτείνεται εδώ, οι μαθητές ερευνούν τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου όταν μεταβάλλεται η μια από τις ίσες πλευρές του.

### Πλαίσιο εφαρμογής:

#### Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β' Λυκείου.

### ***Χρόνος υλοποίησης:***

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 4 διδακτικές ώρες. Εναλλακτικά μπορεί να διατεθεί λιγότερος χρόνος αν επιλεγεί να γίνει παρουσίαση του σεναρίου στην τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα.

### ***Χώρος υλοποίησης:***

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ωστόσο αν ο εκπαιδευτικός αποφασίσει να διδάξει ένα μέρος του στο εργαστήριο και το υπόλοιπο στην σχολική αίθουσα με τη χρήση ενός υπολογιστή και βιντεοπροβολέα ή το υπόλοιπο να δοθεί υπό τη μορφή εργασίας στον ελεύθερο χρόνο θα πρέπει να προσαρμόσει ανάλογα τις δραστηριότητες και να εκπονήσει τα κατάλληλα φύλλα εργασίας.

### ***Προαπαιτούμενες γνώσεις:***

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Την έννοια του εμβαδού και τον τύπο του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου.

Την έννοια της συμμεταβολής δυο μεγεθών.

Την έννοια της γραφικής παράστασης της συμμεταβολής δυο μεγεθών.

Τις απαιτούμενες λειτουργικότητες και χειρισμούς του προγράμματος Cabri Geometry II ή του The Geometers' Sketchpad.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους)

Βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες)

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό

### ***Κοινωνική ενσχυρήστρωση της τάξης***

Οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας, καλούνται να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε

συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας αυτό θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

### **Στόχοι:**

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα από μεν την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου:

Να κατανοήσουν και να περιγράψουν την συμμεταβολή της βάσης και του εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου του οποίου οι ίσες πλευρές παραμένουν σταθερές.

Να συνδέσουν με την έννοια της συμμεταβολής με την έννοια της συνάρτησης.

Να διερευνήσουν και να εκφράσουν την περίπτωση που το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Από δε την παιδαγωγική πλευρά:

Να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες (συμμεταβολή, ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή, συνάρτηση, κτλ.) θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες

Να τους δοθεί η ευκαιρία να οργανώσουν τα δεδομένα τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Να αξιοποιήσουν τα δεδομένα που προκύπτουν από την διερεύνησή τους για να μελετήσουν και να εκφράσουν την συμμεταβολή των δυο μεγεθών.

Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώσουν κανόνες, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

Να οικοδομήσουν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους.

### **Ανάλυση του σεναρίου:**

#### ***Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων***

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε δυο φάσεις:

#### Η πρώτη φάση αφορά:

στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει,

στην κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ώστε οι ίσες πλευρές του να παραμένουν σταθερές.

Προτείνεται οι μαθητές :

Να σχεδιάσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα ως βάση του ισοσκελούς τριγώνου και ένα δεύτερο σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ως μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να σχεδιάσουν το ισοσκελές τρίγωνο με βάση και ίσες πλευρές τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα με τη βοήθεια της εντολής «Πολύγωνο».

Ένας τρόπος κατασκευής του ισοσκελούς τριγώνου είναι ο σχεδιασμός ενός κύκλου με ακτίνα το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και μια χορδή του ίση με τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Το ισοσκελές με κορυφή το κέντρο του κύκλου και βάση τη χορδή ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές κάνουν πειράματα μεταβάλλοντας την βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

#### Η δεύτερη φάση αφορά

στην μέτρηση της βάσης και του εμβαδού του τριγώνου,

στην μεταφορά της μέτρησης των δυο μεγεθών στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων,

στην πινακοποίηση των μετρήσεων

στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών.

Προτείνεται οι μαθητές:

Να επιλέξουν τις κατάλληλες εντολές ώστε να μετρήσουν το μήκος της βάσης και το εμβαδόν του τριγώνου.

Να εμφανίσουν το σύστημα συντεταγμένων και να κάνουν μεταφορά μέτρησης, του μήκους της βάσης στον άξονα  $χχ'$  και του εμβαδού στον κατακόρυφο άξονα  $ψψ'$  με την εντολή «Μεταφορά μέτρησης».

Να σχεδιάσουν τις κάθετες στους δυο άξονες στα σημεία που ορίστηκαν και το σημείο τομής αυτών.

Να σχεδιάσουν τον γεωμετρικό τρόπο του σημείου τομής όταν μεταβάλλεται το ένα άκρο της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου.

Με τη βοήθεια της εντολής «Πινακοποίηση» να πινακοποιήσουν τις τιμές των δυο μεταβλητών.

Να περιγράψουν τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού σε σχέση με την μεταβολή του μήκους της βάσης.

Να εκφράσουν λεκτικά και αλγεβρικά τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών.

Να εκφράσουν λεκτικά και αλγεβρικά το μέγιστο της συμμεταβολής.

Θεωρείται σκόπιμο στο τέλος κάθε φάσης, όλες οι ομάδες να κάνουν μία σύντομη παρουσίαση των συμπερασμάτων τους.

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Το προτεινόμενο λογισμικό επελέγη με κριτήριο την εξυπηρέτηση των αναγκών των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

Το Cabri Geometry II δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

Να επιλέγουν από ένα πλήθος εργαλείων αυτά που θεωρούν κατάλληλα για τις διερευνήσεις τους.

Να αξιοποιούν τις γνώσεις τους και τις εμπειρίες τους προκειμένου να κατανοήσουν την διαδικασία συμμεταβολής των γεωμετρικών μεγεθών του ισοσκελούς τριγώνου.

Να αναπτύσσουν στρατηγικές διερεύνησης και αξιοποίησης των εμπειριών τους και των εργαλείων του λογισμικού.

Να επιλέγουν τα κατάλληλα εργαλεία για να κάνουν τις διερευνήσεις τους.

Να εκφράζουν την συνάρτηση των δυο μεγεθών.

### **Επέκταση:**

Ως προς την επέκταση των παραπάνω οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν την συμμεταβολή μεγεθών και άλλων γεωμετρικών σχημάτων όπως της πλευράς και του εμβαδού ενός ισόπλευρου τριγώνου και να συνδέσουν βαθύτερα την έννοια της συνάρτησης με την συμμεταβολή μεγεθών γεωμετρικών σχημάτων ως παράδειγμα.

### **Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:**

#### ***Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:***

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

#### ***Ως προς τα εργαλεία:***

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

#### ***Ως προς την διαδικασία υλοποίησης***

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

#### ***Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα***

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

## **9.3 Χειρισμός αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων.**